Caracterização algébrica de espinores e duais espinoriais

Aluno:João Pedro Vidigal Teixeira
Orientador: Julio Marny Hoff da Silva
UNESP - Campus de Guaratinguetá - DFI

18 de dezembro de 2023

Relatório científico final entregue à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo em relação ao período de 01/08/2023 á 31/12/2023 do projeto de iniciação cientifica referente ao processo 2023/00177-0.

Resumo

Estudamos anteriormente a construção da álgebra de Clifford dentro do espaço Euclidiano tridimensional, introduzimos o produto geométrico, assim como suas involuções e sua subálgebra par. Descrevemos uma série de álgebras isomorfas a essa álgebra e estudamos os espinores de Pauli como elementos da subálgebra par de Clifford. Neste relatório,apresentamos a continuação do projeto, estudando a equação de Dirac, seus bilineares covariantes, espinores de Dirac como matrizes 4x1 complexas e como elementos de ideias minimais em álgebra de matrizes e da álgebra de Clifford complexificada $\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$. Introduzimos o espinor materno e o operador espinor e finalizamos com a obtenção da equação de Dirac-Hestenes.

Sumário

1 A Equação de Dirac

Objetivamos inicialmente incorporar os efeitos relativísticos aos fenômenos atômicos. Utilizamos da relação de dispersão relativística $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, passando-a para o nível quântico por meio da relação $E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e $p \rightarrow -i\hbar\nabla$. Inserindo os operadores momento e energia nessa equação, obtivemos

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right]\psi + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi = 0,$$

sendo o primeiro termo o operador D'lambertiano $\Box$ e utilizando unidades naturais, temos

$$\left[\Box + m^2\right]\psi = 0,$$

a equação de Klein-Gordon que acrescenta os efeitos relativísticos aos fenômenos atômicos.

Dirac em 1928 linearizou a equação de Klein-Gordon, tornando a uma equação de primeira ordem da forma [3]

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi, \tag{1}$$

com $\mu = 0, 1, 2, 3$, $x^0 = t$ e $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. A equação de Dirac implica na obtenção da equação de Klein-Gordon, contanto que as matrizes γ_μ satisfação as relações

$$\gamma_0^2 = \mathbb{I}, \;\; \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -\mathbb{I},$$
$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 0$$

As matrizes que atendem a essa relação são denominadas matrizes de Dirac. Essas matrizes consistem em matrizes complexas 4x4 e têm a forma

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essas matrizes podem ser expressas em termo de matrizes-spin de Pauli σ_μ, ficando

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Pela métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = diag(+---)$, temos que $\gamma_0 = \gamma^0$, $\gamma_\mu = -\gamma^\mu$ $(\mu = 1, 2, 3)$ e $\gamma^\mu\partial_\mu = \gamma_\mu\partial^\mu$.

Podemos reescrever as relações que as matrizes γ respeitam pela forma compacta

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}\mathbb{I} \tag{3}$$

A equação (3) em questão representa a relação constitutiva na álgebra de Clifford, resultando nas matrizes γ que constituem a equação de Dirac como sendo elementos pertencentes a uma álgebra de Clifford.

A interação com campo eletromagnético pode ser incluído na equação (1) por meio do princípio de mínima ação $i\partial^\mu \mapsto i\partial^\mu - eA^\mu$, onde $\mathbf{A}$ é o potencial eletromagnético. Assim, a equação de Dirac fica

$$\gamma_\mu(i\partial^\mu - eA^\mu)\psi = m\psi. \tag{4}$$

A função de onda, representada por ψ, é um espinor de Dirac, ou seja, uma matriz coluna complexa quadridimensional $\psi \in \mathbb{C}^4$.

1.1 Bilineares Covariantes

Definiremos o adjunto de Dirac de um espinor ψ, como uma matriz linha da forma

$$\psi^\dagger\gamma_0 = (\psi_1^\star \quad \psi_2^\star \quad -\psi_3^\star \quad -\psi_4^\star) \tag{5}$$

Usamos o adjunto de Dirac para definir um conjunto de quatro funções reais

$$J^\mu = \psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\psi. \tag{6}$$

Abrindo o termo matricial utilizando (2) e (3), teremos

$$J^0 = \psi^\dagger\psi, \; J^0 \geq 0 \tag{7}$$

$$J^\mu = \psi^\dagger \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu & 0 \end{pmatrix} \psi \tag{8}$$

Essas funções reais são componentes do quadrivetor denominado corrente de Dirac $\mathbf{J}$, definido por

$$\mathbf{J} = \gamma_\mu J^\mu$$

A corrente de Dirac covaria por transformação de Lorentz, de forma que a suas componentes são chamadas de bilineares covariantes. Essa covariancia pode ser vista facilmente pela equação (7), uma vez que, espinor de Dirac transforma-se da forma $\psi' = S\psi$ e $S^\dagger = S^{-1}$, teremos

$$J'^0 = \psi'^\dagger\psi' = (S\psi)^\dagger S\psi = \psi^\dagger S^{-1}S\psi = \psi^\dagger\psi = J^0.$$

Como vimos, a quantidade $J^0 = \psi^\dagger\psi$ é a densidade de probabilidade de encontrar uma partícula em uma determinada região do espaço. Por sua vez, as quantidades $J^\mu = \psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\psi$ com $\mu = 1, 2, 3$, estão relacionadas com às densidades de probabilidade de direção. Dessa maneira, a expressão $\mathbf{J} = \gamma_\mu J^\mu$ descreve a corrente de probabilidade no sistema. Vale ressaltar que essas grandezas obedecem à equação de continuidade, $\partial_\mu J^\mu$, conforme evidenciado pela análise da equação (1). Iniciamos obtendo seu adjunto hermitiano

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi \to (i\partial\gamma^\mu\psi)^\dagger = m\psi^\dagger \implies -i\partial_\mu\psi^\dagger(\gamma^\mu)^\dagger = m\psi^\dagger,$$

como $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ e $(\gamma^\mu)^\dagger = -\gamma^\mu$ $(\mu = 1, 2, 3)$, assim

$$-i\partial_0\psi^\dagger\gamma^0 + i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma^\mu = m\psi^\dagger,$$

multiplicando à esquerda $\gamma_0\psi$ e usando a relação$\gamma_0\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma_0$, teremos

$$i\partial_0\psi^\dagger\psi + i\partial_\mu\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\psi = -m\psi^\dagger\gamma_0\psi. \tag{9}$$

Multiplicando à direita $\psi^\dagger\gamma_0$ na equação (1),

$$i\psi^\dagger\partial_0\psi + i\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu\psi = m\psi^\dagger\gamma_0\psi,$$

e somando com a equação (9), concluímos que

$$\begin{aligned} \partial_0(\psi^\dagger\psi) + \partial_\mu(\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\psi) = 0 \to \partial_0 J^0 + \partial_\mu J^\mu = 0 \\ \therefore \partial_\mu J^\mu = 0 \;\; (\mu = 0, 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Logo, a probabilidade de encontrar uma partícula, descrita pela corrente de Dirac, é conservada ao longo do espaço-tempo.

Além das quatro funções bilineares covariantes que apresentamos, existem outros 12 covariantes bilineares que determinam o estado físico do elétron.

$$\begin{cases} \Omega_1 = \psi^\dagger\gamma_0\psi \\ \Omega_2 = \psi^\dagger\gamma_0\gamma^{0123}\psi \\ S^{\mu\nu} = i\psi^\dagger\gamma_0\gamma^{\mu\nu}\psi \\ K^\mu = i\psi^\dagger\gamma_0\gamma^{0123}\gamma^\mu\psi \end{cases} \tag{10}$$

onde $\gamma^{\mu\nu} = \gamma^\mu\gamma^\nu$ e $\gamma^{0123} = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$.

2 Espinores em Ideais

Um espinor de Dirac é uma representação matricial complexa, denotada por $\psi \in \mathbb{C}^4$. No entanto, à semelhança do que fizemos com os espinores de Pauli no relatório anterior, podemos estabelecer uma relação entre o espinor e o espaço das matrizes quadradas. Matrizes $\psi \in \mathbb{C}^4$ têm uma relação biunívoca com matrizes 4x4 pertencentes ao espaço $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, cuja apenas a primeira coluna não é nula. Em outras palavras, podemos expressar $\psi \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$, onde f é o indepotente primitivo, que pode ser expresso em termo de matrizes de Dirac e tem a forma

$$f = \frac{1}{4}(\mathbb{I} + \gamma_0)(\mathbb{I} + i\gamma_1\gamma_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

O espaço $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$ configura o ideal minimo à esquerda de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, possibilitando a representação dos espinores de Dirac por meio de matrizes quadradas que pertencem a esse ideal. Assim,

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4 \longrightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f. \tag{12}$$

Como vimos na equação (3), as matrizes γ de Dirac respeitam a relação definidora de uma álgebra de Clifford.

O isomorfismo que estabelece a relação entre a álgebra de Clifford sobre o espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{1,3}$ é $\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3} \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. A necessidade de complexificação surge na definição do isomorfismo, como evidenciado por $\mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(4, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$, onde, por sua vez, $\mathbb{C} \otimes \mathcal{M}(4, \mathbb{R}) \simeq \mathcal{M}(4, \mathbb{C})$. Essa complexificação desempenha um papel crucial ao garantir que os 8 graus de liberdade do espinor ψ sejam adequadamente preservados.

A identificação entre as matrizes de Dirac e os elementos da base de $\mathbb{R}^{1,3}$ é dado por $\{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \longleftrightarrow \{e_0, e_1, e_2, e_3\}$. Assim, um espinor $\psi \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f$ terá a forma $\psi = \sum_{\mu=1}^{4} \psi_\mu f_\mu$, onde

$$f_1 = f = \frac{1}{4}(1 + \gamma_0)(1 + i\gamma_1\gamma_2) \tag{13}$$

$$f_2 = -\gamma_1\gamma_3 f \doteq \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 \\ 1 & \vdots \\ 0 & \vdots \\ 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}, \; f_3 = -\gamma_0\gamma_3 f \doteq \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 \\ 0 & \vdots \\ 1 & \vdots \\ 0 & \cdots 0 \end{pmatrix}, \; f_4 = -\gamma_0\gamma_1 f \doteq \begin{pmatrix} 0 & \cdots 0 \\ 0 & \vdots \\ 0 & \vdots \\ 1 & \cdots 0 \end{pmatrix}$$

Contudo, apesar de $\mathcal{M}(4, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$, suas involuções, não são análogas. A tabela a seguir contem a correspondência entre as involuções:

	$\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$	$\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$	
Complexo conjugado	$a^\star$	$\gamma_{013} a^\star \gamma_{013}$	
	$\gamma_{013} a^\star \gamma_{013}^{-1}$	$a^\star$	Complexo conjugado
Involução graduada	$\hat{a}$	$\gamma_{013} a \gamma_{013}^{-1}$	
Reversão	$\tilde{a}$	$\gamma_{13} a \gamma_{13}^{-1}$	
Conjugação de Clifford	$\bar{a}$	$\gamma_{02} a^T \gamma_{02}^{-1}$	
	$\gamma_{13} \tilde{a} \gamma_{13}$	a^T	Transposto
	$\gamma_0 \tilde{a}^\star \gamma_0$	$a^\dagger$	Conjugação Hermitiana
	$\tilde{a}^\star$	$\gamma_0 a^\dagger \gamma_0$	Adjunto de Dirac

Dado que o conjugado complexo de um espinor de Dirac varia entre essas duas álgebras, a representação de sua parte real será distinta. Utilizando a tabela de correspondência de involuções e sendo $\text{Re}(\psi) = \frac{1}{2}(\psi + \psi^\star)$, concluímos que a parte real de $\psi \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$ é

$$\text{Re}(\psi) = \begin{pmatrix} \text{Re}(\psi_1) & 0 & 0 & 0 \\ \text{Re}(\psi_2) & 0 & 0 & 0 \\ \text{Re}(\psi_3) & 0 & 0 & 0 \\ \text{Re}(\psi_4) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Para $\psi \in \mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$, seu conjugado complexo, representado matricialmente, usando as relações (13) e a tabela de involuções, é dado por

$$\psi^\star = \gamma_{013}\psi\gamma_{013}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\psi_2^\star & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1^\star & 0 & 0 \\ 0 & \psi_4 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_3^\star & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Logo, sua parte real é representado por

$$\text{Re}(\psi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^\star & 0 & 0 \\ \psi_2 & \psi_1^\star & 0 & 0 \\ \psi_3 & \psi_4 & 0 & 0 \\ \psi_4 & -\psi_3^\star & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Em contraste com (14), a parte real de $\psi \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f$ carrega as mesmas informações que o espinor de Dirac original $\psi \in \mathbb{C}^4$ em sua primeira coluna.

Em suma, os espinores de Dirac ψ podem ser expressos como um espinor coluna $\psi \in \mathbb{C}^4$, um espinor de matriz quadrada $\psi \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$ ou como um espinor algébrico $\psi \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f$, onde os dois últimos diferem estruturalmente.

2.1 Bilineares Covariantes Através de Espinores Algébricos

Considerando que espinores de Dirac podem ser representados como matrizes coluna, matrizes quadradas e de maneira algébrica, os bilineares covariantes podem ser recuperados para essas novas representações do espinor.

Das componentes da corrente de Dirac, conforme expressas pela equação (5), constata-se que, para $\psi \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$, o traço da matriz quadrada resultante é equivalente as componentes obtidas utilizando o espinor original de Dirac. Podemos ver isso facilmente para a componente J^0, com $\psi \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$,

$$J^0 = \psi^\dagger\gamma_0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^\star\psi_1 & \psi_1^\star\psi_2 & \psi_1^\star\psi_3 & \psi_1^\star\psi_4 \\ \psi_2^\star\psi_1 & \psi_2^\star\psi_2 & \psi_2^\star\psi_3 & \psi_2^\star\psi_4 \\ \psi_3^\star\psi_1 & \psi_3^\star\psi_2 & \psi_3^\star\psi_3 & \psi_3^\star\psi_4 \\ \psi_4^\star\psi_1 & \psi_4^\star\psi_2 & \psi_4^\star\psi_3 & \psi_4^\star\psi_4 \end{pmatrix},$$

tirando seu traço, concluiremos que

$$J^0 = \text{Tr}(\psi^\dagger\psi) = \psi_1^\star\psi_1 + \psi_2^\star\psi_2 + \psi_3^\star\psi_3 + \psi_4^\star\psi_4.$$

Assim, as componentes da corrente de Dirac para espinores $\psi \in \mathcal{M}(4, \mathbb{C})f$ podem ser expressas por

$$J^\mu = \text{Tr}(\psi^\dagger\gamma_0\gamma^\mu\psi). \tag{17}$$

Agora, de acordo com a equação (13), seja $f = \frac{1}{4}(1 + \gamma_0 + i\gamma_{12} + i\gamma_{012})$. Sua projeção em um 0-vetor (um escalar) será dada por $\langle f\rangle_0 = \frac{1}{4}$, ou seja, $4\langle f\rangle_0 = 1$. No entanto, f também

pode ser representado como a matriz (10), cujo o traço $\mathrm{Tr}(f) = 1$. Desta forma, podemos relacionar a projeção escalar e o traço por $\mathrm{Tr}(f) = 4\langle f\rangle_0$.

Para $\psi \in \mathbb{C}\otimes Cl_{1,3}$, seu traço será $\mathrm{Tr}(\psi) = \sum_{\mu=1}^{4}\psi_\mu \mathrm{Tr}(f_\mu)$; contudo, $\mathrm{Tr}(f_\mu) = 0$ para $\mu \neq 1$, portanto $\mathrm{Tr}(\psi) = \psi_1\mathrm{Tr}(f_1)$. Agora, utilizando da relação estabelecida anteriormente, podemos concluir que

$$\mathrm{Tr}(\psi) = 4\langle\psi\rangle_0. \tag{18}$$

Assim, da equação (17), obtivemos a expressão

$$J^\mu = \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\psi\psi^\dagger\gamma_0) = 4\langle\gamma^\mu\psi\psi^\dagger\gamma_0\rangle_0 \tag{19}$$

para $\psi \in \mathbb{C}\otimes Cl_{1,3}$, onde recuperamos as componentes da corrente de Dirac para representação algébrica de espinores.

O mesmo pode ser feito para todos os outros bilineares covariantes (10)

$$\begin{cases} \Omega_1 = 4\langle\widetilde{\psi}^\star\psi\rangle_0 \\ \Omega_2 = -4\langle\widetilde{\psi}^\star\gamma_{0123}\psi\rangle_0 \\ S^{\mu\nu} = 4\langle\widetilde{\psi}^\star i\gamma^{\mu\nu}\psi\rangle_0 \\ K^\mu = 4\langle\widetilde{\psi}^\star i\gamma_{0123}\gamma^\mu\psi\rangle_0 \end{cases} \tag{20}$$

3 Espinor como Operador

Inicialmente, associaremos um espinor algébrico de Clifford ψ com dois objetos novos a serem definidos: o espinor materno e o operador espinor.

Vamos definir o espinor materno como um multivetor $\Phi \in Cl_{1,3}\frac{1}{2}(1+\gamma_0)$, que, quando expresso de maneira matricial, assume a forma:

$$\Phi = 2\begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^\star & 0 & 0 \\ \psi_2 & \psi_1^\star & 0 & 0 \\ \psi_3 & \psi_4 & 0 & 0 \\ \psi_4 & -\psi_3^\star & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Da equação (16), podemos associar Φ à parte real de um espinor algébrico e, portanto,

$$\Phi = 4\mathrm{Re}(\psi). \tag{22}$$

Como discutimos anteriormente, a parte real de um espinor algébrico carrega as informações do espinor original de Dirac. Para "extrair"essas informações e obter, no caso, um espinor algébrico $\psi \in (\mathbb{C}\otimes Cl_{1,3})f$, basta fazermos o produto à direita de (21) pela matriz quadrada

$$M = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Essa matriz pode ser expressa em termos de matrizes γ na forma $M = \frac{1}{4}(\mathbb{I}+i\gamma_{12})$, possibilitando-nos escrever

$$\psi = \Phi\frac{1}{4}(\mathbb{I}+i\gamma_{12}) = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in (\mathbb{C}\otimes Cl_{1,3})f. \tag{23}$$

Definiremos o operador espinor Ψ como sendo a parte real do espinor materno, $\Psi = \text{even}(\Phi)$. A partir da equação (22), obtemos $\Psi = \text{even}(4\text{Re}(\psi))$. Como a operação de tomar a parte real e a operação de tomar a parte par comutam, concluímos que

$$\Psi = \text{Re}(\text{even}(\psi)) = \begin{pmatrix} \psi_1 & -\psi_2^\star & \psi_3 & \psi_4^\star \\ \psi_2 & \psi_1^\star & \psi_4 & -\psi_3^\star \\ \psi_3 & \psi_4 & \psi_1 & \psi_2^\star \\ \psi_4 & -\psi_3^\star & \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Percebemos que as duas primeiras colunas de Ψ carregam as mesmas informações de Φ, de tal forma que se fizermos o produto à esquerda de Ψ pela matriz

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

reobtemos Φ. Essa matriz, analogamente a que fizemos com M, pode ser escrita em termos de matrizes γ na forma $N = \mathbb{I} + \gamma_0$, permitindo escrevermos

$$\Phi = \Psi(\mathbb{I} + \gamma_0). \tag{25}$$

Logo, usando da equação (23), podemos reobter o espinor de Dirac original

$$\psi = \Psi\frac{1}{4}(\mathbb{I} + \gamma_0)(\mathbb{I} + i\gamma_{12}) = \Psi f \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f. \tag{26}$$

Podemos decompor o espinor materno Φ em parte par e parte impar, representados como $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, onde $\Phi_0 \in Cl^+_{1,3}$ e $\Phi_1 \in Cl^-_{1,3}$. Dado que $\Phi \in Cl_{1,3}\frac{1}{2}(1 + \gamma_0)$, e sabendo que $Cl^+_{1,3} \oplus Cl^-_{1,3} = Cl_{1,3}$, as partes impar e par devem satisfazer a seguinte igualdade:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 = (\Phi_0 + \Phi_1)\frac{1}{2}(1 + \gamma_0) = \frac{1}{2}(\Phi_0 + \Phi_1\gamma_0) + \frac{1}{2}(\Phi_1 + \Phi_0\gamma_0). \tag{27}$$

Isso implica que $\Phi_0 = \Phi_1\gamma_0$ e $\Phi_1 = \Phi_0\gamma_0$ e como $\text{even}(\Phi) = \Psi \longrightarrow \Psi = \Phi_1\gamma_0$. Assim, podemos denotar $\Phi = \Psi + \Psi\gamma_0$[como obtido em (25).

Agora, ao considerarmos o produto entre uma unidade complexa e um espinor ψ, buscamos identificar uma matriz quadrada que possa desempenhar o papel de i e ser escrita em termos de matrizes γ, assim como fizemos anteriormente para as matrizes M e N.

Para um espinor $\psi \in \mathbb{C}^4$, multiplicar uma unidade complexa i equivale a fazer o produto à direita por

$$\gamma_2\gamma_1 = \gamma_{21} = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \tag{28}$$

ou seja, $i\psi = \psi\gamma_{21}$.

Logo, a parte real de $i\psi$, com $\psi \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f$, é dado por $\Phi\gamma_{21}$ cuja parte par é $\Psi\gamma_{21}$.

Agora, armados com essas informações, podemos extrair a parte real da equação de Dirac $(i\partial - e\mathbf{A})\psi = m\psi$, para $\psi \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f$, teremos

$$\partial\text{Re}(i\psi) - e\mathbf{A}\text{Re}(\psi) = m\text{Re}(\psi) \longrightarrow \partial\Phi\gamma_{21} - e\mathbf{A}\Phi = m\Phi. \tag{29}$$

Podemos decompor essa equação em parte impar e parte par, da forma

$$\partial\Phi_0\gamma_{21} - e\mathbf{A}\Phi_0 = m\Phi_0\gamma_0 \ \ \text{(par)} \tag{30}$$

$$\partial\Phi_1\gamma_{21} - e\mathbf{A}\Phi_1 = m\Phi_1\gamma_0 \ \ \text{(impar)}. \tag{31}$$

Portanto, a parte par (30) satisfaz a equação

$$\partial\Psi\gamma_{21} - e\mathbf{A}\Psi = m\Psi\gamma_0, \tag{32}$$

que é a equação de Dirac-Hestenes.

Os espinores coluna de Dirac são substituídos por multivetores pares reais que não estão associados a nenhum ideal a esquerda da álgebra de Clifford $Cl_{1,3}$.

4 Conclusão

Ao concentrarmos nossa atenção na análise da equação de Dirac, seus bilineares covariantes e na representação dos espinores de Dirac matrizes coluna complexas de dimensões 4×1, exploramos esses espinores como elementos de ideais minimais, tanto na álgebra de matrizes quanto na álgebra de Clifford complexificada $\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3}$. A introdução do espinor materno e do operador espinor culminou na dedução da equação de Dirac-Hestenes, marcando assim o encerramento deste projeto.

A utilização da álgebra de Clifford proporciona vantagens significativas na simplificação tanto das equações que descrevem as partículas, no caso em questão, os bilineares covariantes que caracterizam o estado físico do elétron, quanto do espinor, no caso, de Dirac. Descrevendo o espinor algebricamente por $\psi \in (\mathbb{C} \otimes Cl_{1,3})f$, e ao possuir uma representação matricial dentro do espaço $\mathcal{M}(4, \mathbb{C})$, temos maior maior flexibilidade para modelá-lo de acordo com nossas necessidades, facilitando assim a resolução de problemas. Em outras palavras, os espinores podem ser expressos por meio de elementos na álgebra de Clifford, o que proporciona uma ferramenta matemática que simplifica a manipulação e a descrição das propriedades físicas associadas a esses objetos.

Referências

[1] Vaz J, “A Álgebra Geométrica do Espaço Euclidiano e a Teoria de Pauli”, Revista Brasileira de Ensino de Física, vol.19 ed. 2, junho 1997.

[2] Vaz J, d. Disponível em:`https://www.ime.unicamp.br/~vaz/algeo.htm` Acesso: 07 de julho de 2023.

[3] Lounesto P, “Clifford Algebras and Spinors”, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, 2001.

[4] Y. Takahashi, A Spinor Reconstruction Theorem, Prog. Theor. Phys. 69, 369 (1983).

[5] da Rocha R, “Álgebra Linear e Multilinear”, 1nd ed, Livraria da Física, 2017.

[6] da Rocha R, Vaz Jr. Jayme, “Álgebra de Clifford e Espinores”, 1nd ed, Livraria da Física, 2012.

[7] Felipe Rocha, 1985-F335a Aplicações da álgebra do espaço físico em mecânica quântica/ Felipe Rocha Felix. – Campinas, SP : [s.n.], 2016.